

## COMPITINO DI ARITMETICA

6 novembre 2013

Cognome e nome: .....

Numero di matricola: .....

IMPORTANTE: Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non saranno valutate risposte prive di motivazioni, o con motivazioni non chiare.

### Esercizio 1.

Per ogni  $n \geq 0$  definiamo  $x_n = 2^{2^n} + 1$ . Dimostrare che:

- per ogni  $n \geq 1$  si ha  $x_n = x_0 \cdots x_{n-1} + 2$ ;
- $(x_i, x_j) = 1$  per ogni  $i \neq j$ .

### Esercizio 2.

Sia  $\mathbb{N}_{100} = \{1, \dots, 100\}$ . Calcolare la cardinalità dei seguenti insiemi:

- $\{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_{100}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}_{100}) \mid A \cap B \text{ non contiene numeri dispari}\}$ .
- $\{f : \mathbb{N}_{100} \rightarrow \mathbb{N}_{100} \mid f(1) \cdots f(100) \equiv 1 \pmod{20}\}$ .

### Esercizio 3.

a) Risolvere la seguente congruenza:

$$x^2 + 683x + 730 \equiv 0 \pmod{707}.$$

b) Determinare il numero di soluzioni modulo 101 di

$$x^{100} + 683x^{50} + 730 \equiv 0 \pmod{101}.$$